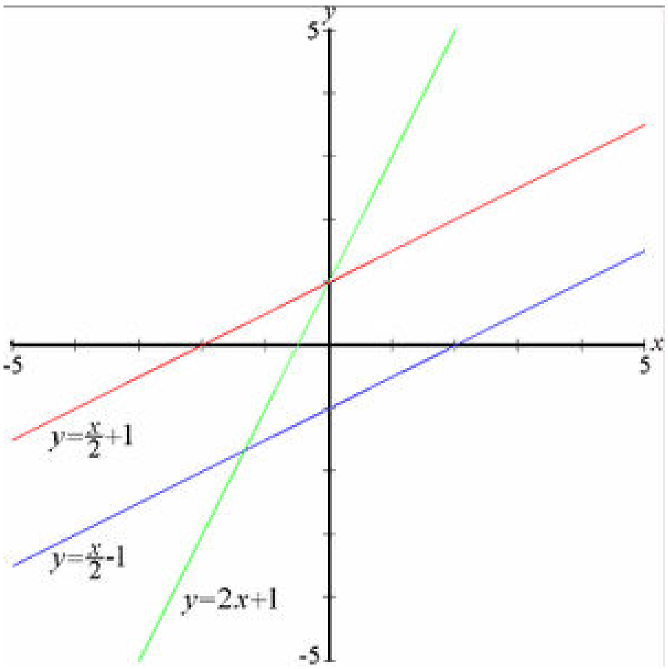
Funkcje elementarne

1. **Funkcja liniowa: y=ax+b**; $a,b \in R$, $D_f = \boldsymbol{R}$; $f(D_f) = \boldsymbol{R}$ (gdy $a \neq 0$) oraz $f(D_f) = \{b\}$ (gdy a=0)

a - współczynnik kierunkowy prostej ($a = tg\alpha$, α - kąt nachylenia prostej do osi OX),

b – współrzędna y przecięcia prostej z osią OY.

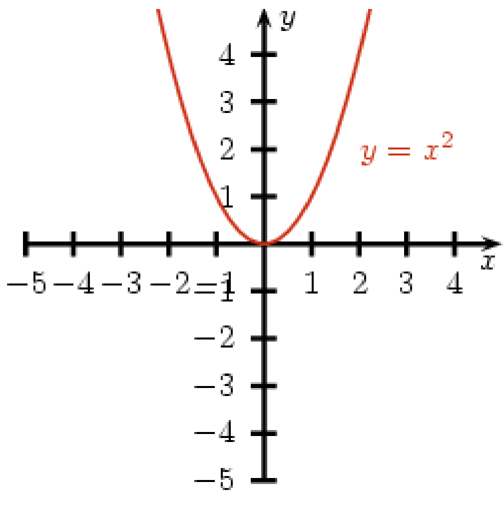


Przykłady i wykresy powyżej: $f_1(x) = 2x + 1$; $f_2(x) = x / 2 + 1$; $f_3(x) = x / 2 - 1$.

2. **Funkcja potęgowa: y=x^a**; $a \in R$, $a \neq 0$, $a \neq 1$

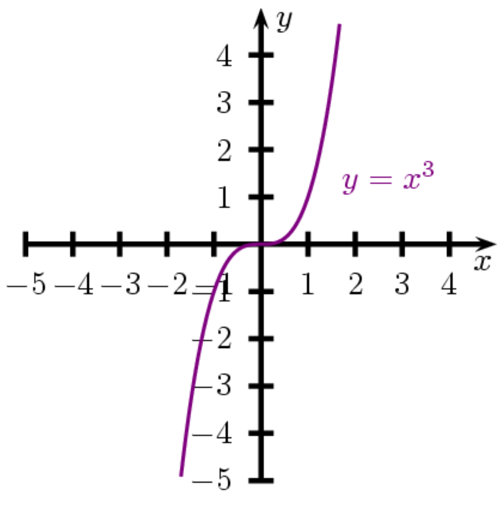
Funkcja potęgowa ma różne własności i wykresy w zależności od wartości wykładnika *a*:

1) a jest liczbą naturalną parzystą



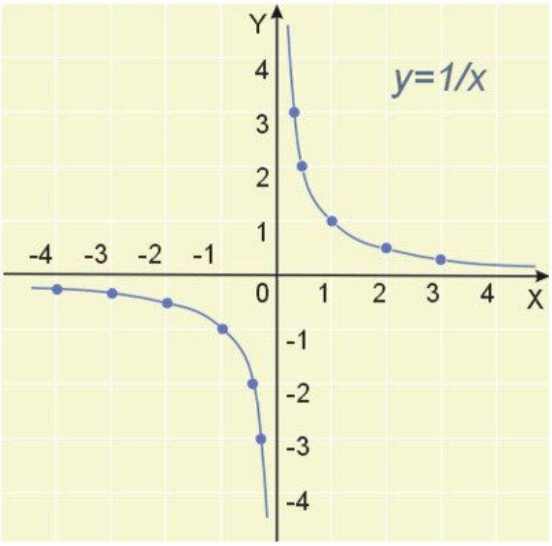
$D_f = \boldsymbol{R}$; $f(D_f) = [0; +\infty)$

2) a jest liczbą naturalną nieparzystą;



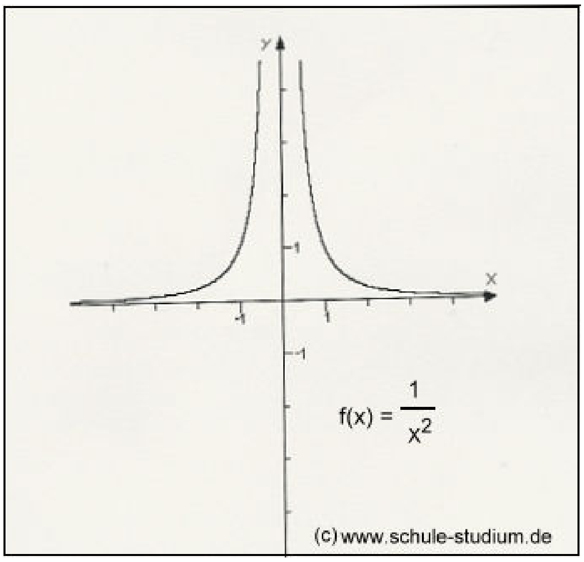
$D_f = \boldsymbol{R}$; $f(D_f) = \boldsymbol{R}$

3) a – liczba całkowita ujemna nieparzysta



$D_f=\boldsymbol{R}\text{-}\{0\}$ $\quad f(D_f)=\boldsymbol{R}\text{-}\{0\}$

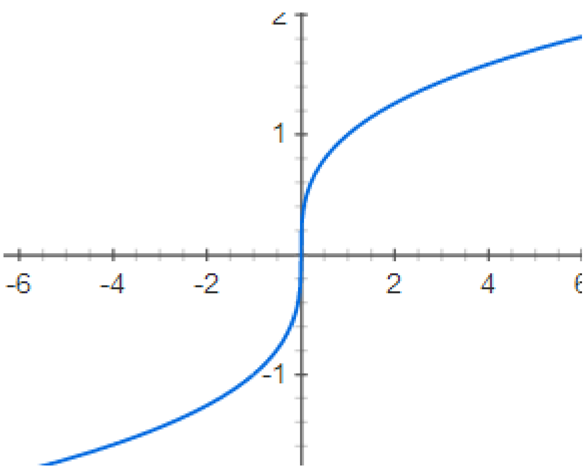
4) a – liczba całkowita ujemna parzysta



$D_f=\boldsymbol{R}\text{-}\{0\}$ $\quad f(D_f)=(0;+\infty)$

5) a jest ułamkiem *1/m*

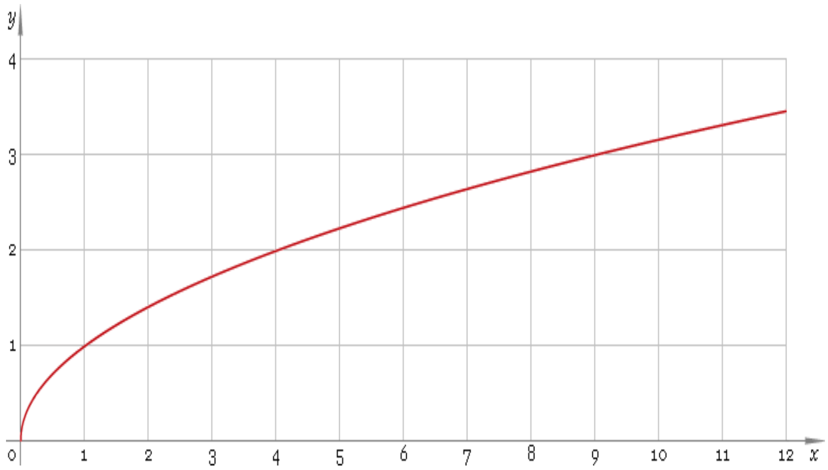
m jest naturalną liczbą nieparzystą;



$y=\sqrt[3]{x}$

$D_f=\boldsymbol{R};$ $\quad f(D_f)=\boldsymbol{R}$

m jest naturalną liczbą parzystą – $D_f=\boldsymbol{R}^+$;

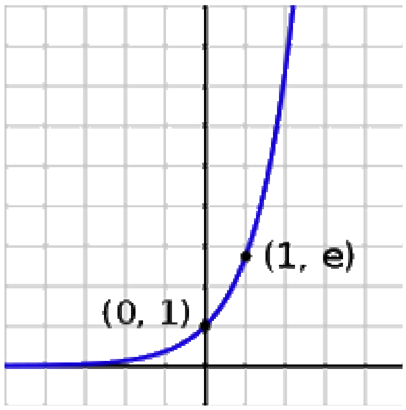


$y=\sqrt{x}$

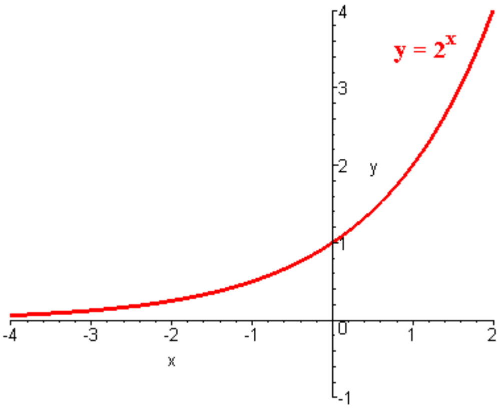
$D_f=\boldsymbol{R}^+\cup\{0\};$ $\quad f(D_f)=\boldsymbol{R}^+\cup\{0\}$

3. **Funkcja wykładnicza: y=a^x;** $a\in R,\ a>0;$ $\qquad D_f=\boldsymbol{R}$ $\qquad f(D_f)=\boldsymbol{R}^+$

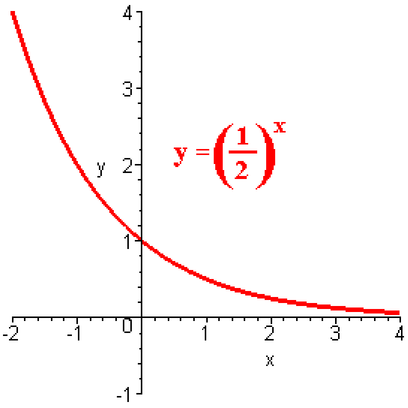
Specjalnym przykładem funkcji wykładniczej jest funkcja eksponencjalna $y = e^x$ z podstawą e≈2,7182818285… (*e* jest liczbą niewymierną definiowaną jako granica ciągu: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$).



$y=e^x$



$y=2^x$



$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

4. Funkcja logarytmiczna: $y=\log_a x$; $a\in R^+$; $D_f=\boldsymbol{R}^+$ $f(D_f)=\boldsymbol{R}$

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej:

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

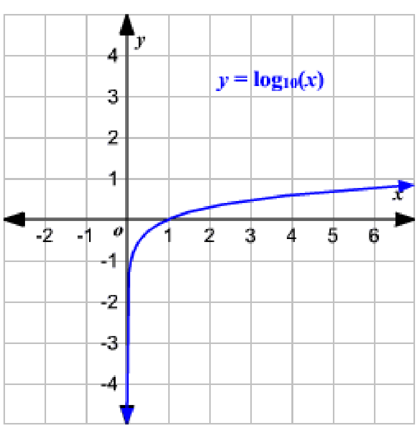
Logarytmem naturalnym nazywamy logarytm o podstawie *e* i oznaczamy *lnx*:

$$\ln x=\log_e x$$

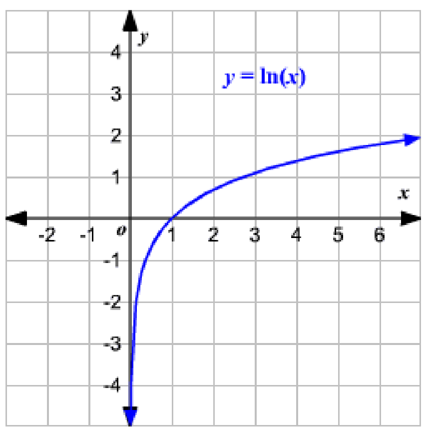
Logarytmem dziesiętnym nazywamy logarytm o podstawie *10* i oznaczamy *logx*:

$$\log x=\log_{10} x$$

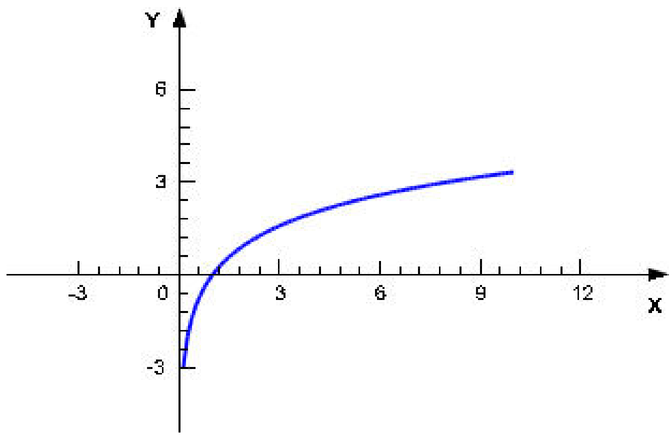
Przykłady wykresów funkcji logarytm dla $a>1$



$y=\log x$

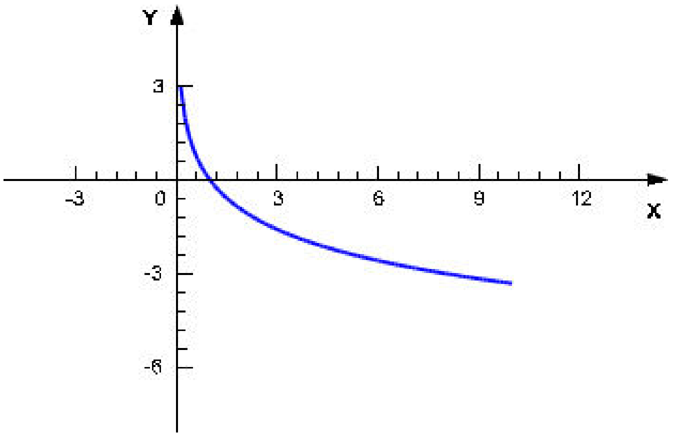


$y=\ln x$



$y=\log_2 x$

Przykład wykresu funkcji logarytm dla 0<*a*<1



$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

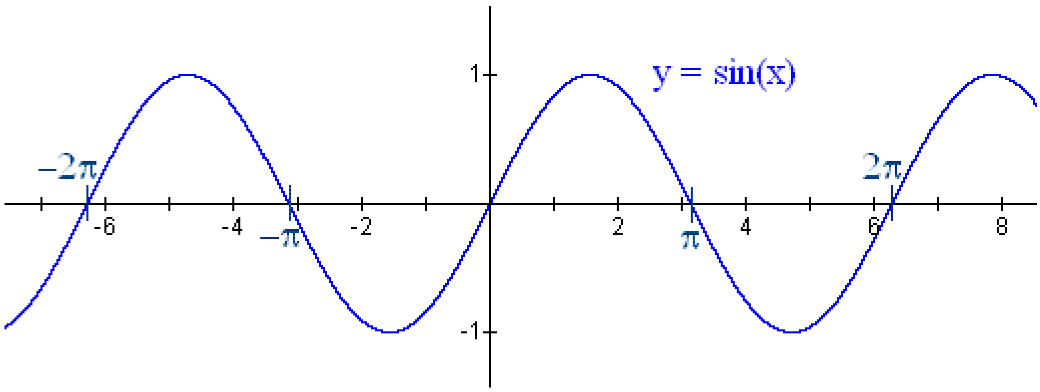
Najważniejsze własności logarytmu:

1. $a^{\log_a b} = b$,
2. $\log_a 1 = 0$,
3. $\log_a a = 1$.
4. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,
5. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,
6. $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$,

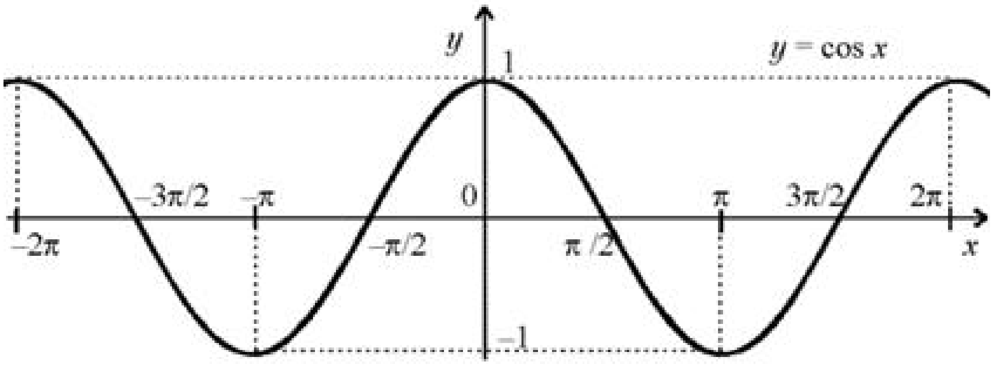
Jeżeli $a > 1$ wtedy: $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$

Jeżeli $0 < a < 1$ wtedy: $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$

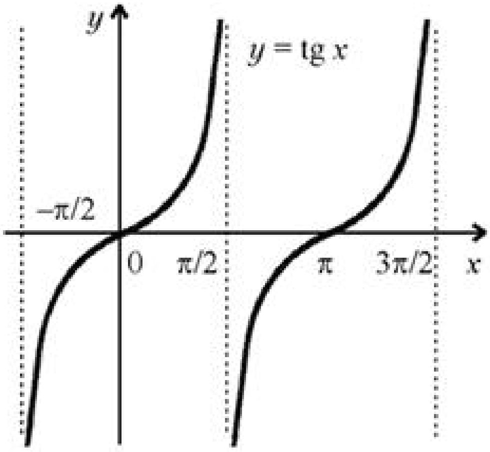
5. Funkcje trygonometryczne: *y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctg*

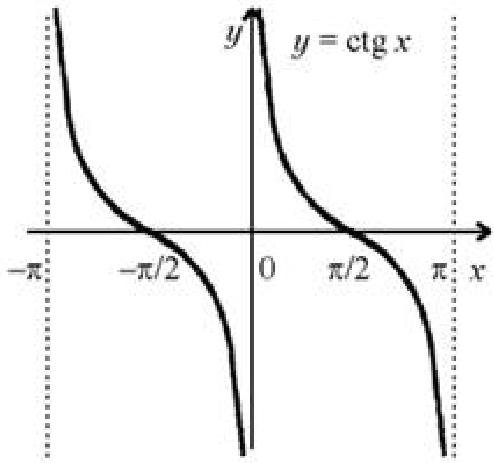


$D_f = \boldsymbol{R}$ $f(D_f) = [-1;1]$



$D_f=\mathbf{R}$ $f(D_f)=[-1;1]$





$D_f=\mathbf{R}-\{x\in\mathbf{R}: x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}; k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$ $f(D_f)=\mathbf{R}$ $D_f=\mathbf{R}-\{x\in\mathbf{R}: x\neq k\pi; k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$ $f(D_f)=\mathbf{R}$

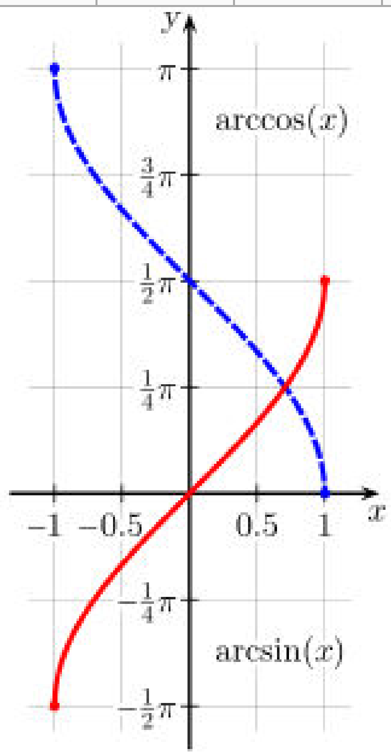
<u>Tożsamości trygonometryczne:</u>

1. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
2. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
4. $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$
5. $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$
6. $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

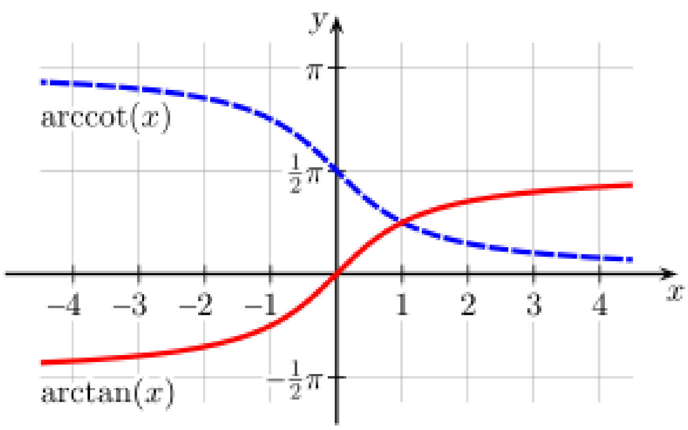
6. Funkcje cyklometryczne (funkcje arcus): *y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx*

Funkcje cyklometryczne są funkcjami odwrotnymi do funkcji trygonometrycznych

Nazwa	Oznaczenie	Definicja	Dziedzina	Zbiór wartości funkcji
Arcus sinus	$y = \arcsin(x)$	$x=\sin(y)$	$[-1 ; +1]$	$[-\pi/2 ; \pi/2]$
Arcus cosinus	$y = \arccos(x)$	$x=\cos(y)$	$[-1 ; +1]$	$[0 ; \pi]$
Arcus tangens	$y = \mathrm{arctg}(x)$	$x = \mathrm{tg}(y)$	$\boldsymbol{R}$	$(-\pi/2 ; \pi/2)$
Arcus cotangens	$y = \mathrm{arcctg}(x)$	$x =\mathrm{ctg}(y)$	$\boldsymbol{R}$	$(0 ; \pi)$



Linia czerwona ciągła - $f(x) = \arcsin(x)$; linia niebieska przerywana - $f(x) = \arccos(x)$



Linia czerwona ciągła - $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$; ; linia niebieska przerywana - $f(x) = \mathrm{arcctg}(x)$

7. **Funkcje hiperboliczne:** *y=sinhx, y=coshx, y=tghx, y=ctghx.*

1. Sinus hiperboliczny (oznaczenie: *sinhx* lub *shx*):

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad D_f=\boldsymbol{R}; \quad f(D_f)=\boldsymbol{R}$$

2. Cosinus hiperboliczny (oznaczenie: *coshx* lub *chx*):

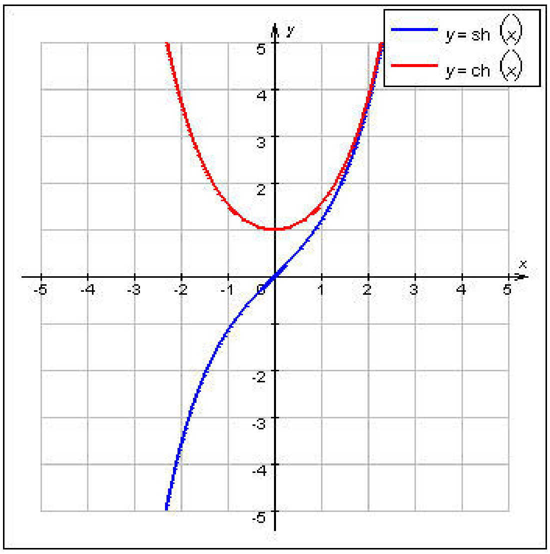
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad D_f=\boldsymbol{R}; \quad f(D_f)=[1;+\infty)$$

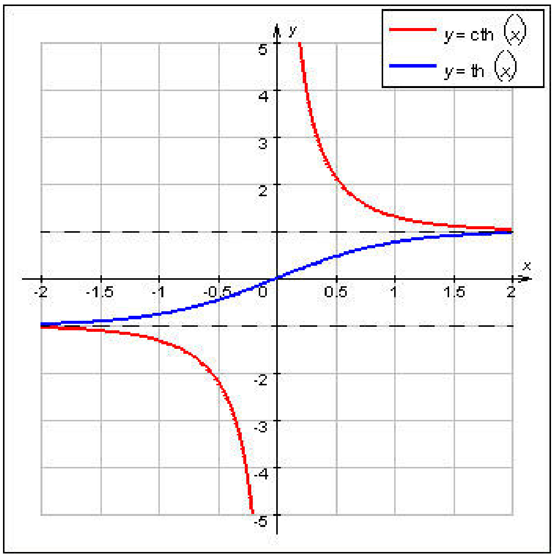
3. Tangens hiperboliczny (oznaczenie: *tghx* lub *thx*):

$$tghx = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad D_f=\boldsymbol{R}; \quad f(D_f)=(-1;+1)$$

4. Cotangens hiperboliczny (oznaczenie: *ctghx* lub *cthx*):

$$ctghx = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad D_f=\boldsymbol{R}-\{0\}; \quad f(D_f)=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$$





Tożsamości hiperboliczne:

1. $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$
2. $\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2}$
3. $\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$

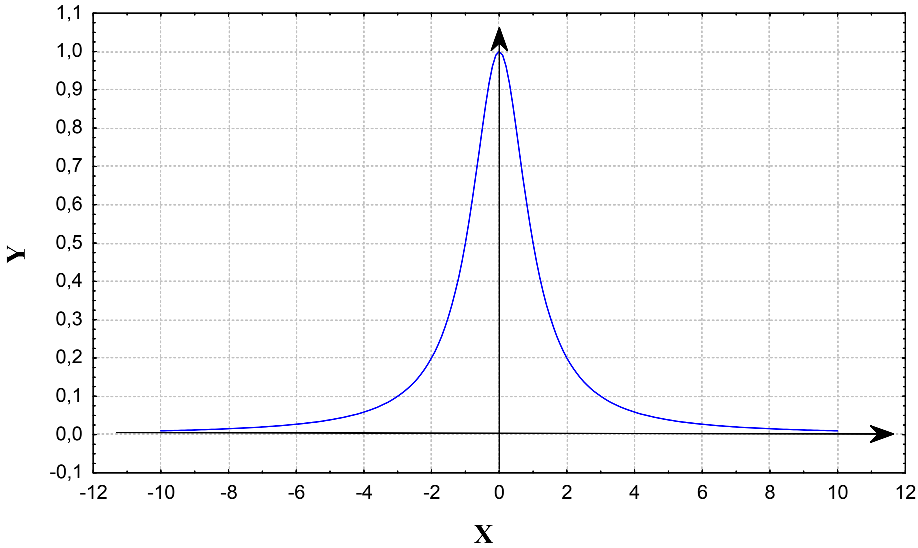
4. $e^x = \cosh x + \sinh x$

5. $e^{-x} = \cosh x - \sinh x.$

Funkcja $y = \dfrac{a^2}{b^2 + x^2}$

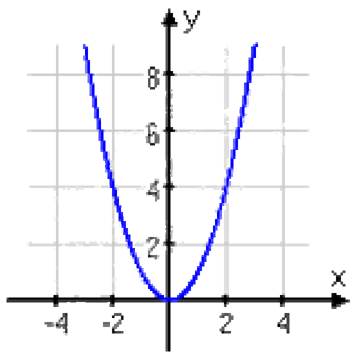
$D_f = \boldsymbol{R};\quad f(D_f) = (0; \frac{a^2}{b^2})$

Wykres funkcji y=1/(1+x^2)



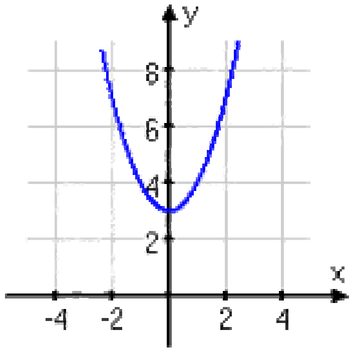
Przekształcenia wykresów funkcji

Na przykładzie wykresu funkcji



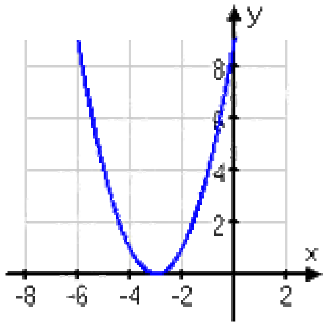
$y=x^2$

1. $f(x) + a$ przesunięcie równoległe wzdłuż osi OY o a jednostek



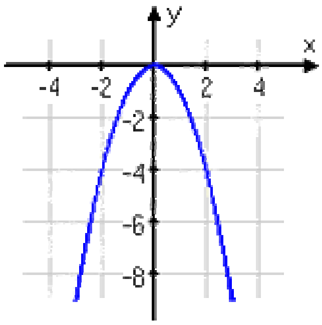
$y=x^2+3$

2. $f(x + a)$ przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX o a jednostek w lewo; $f(x - a)$ przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX o a jednostek w prawo



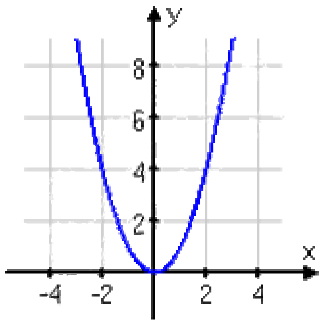
$y=(x+3)^2$

3. $-f(x)$ odbicie względem osi OX



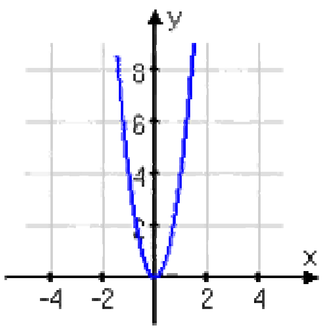
$y=-x^2$

4. $f(-x)$ odbicie względem osi OY



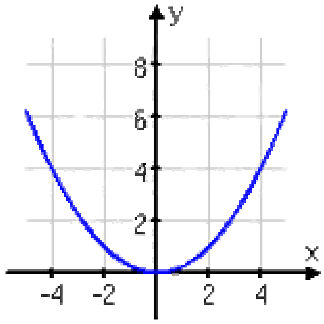
$y=(-x)^2$

5. $f(ax)$ $a>1$ skala osi OX jest a razy mniejsza



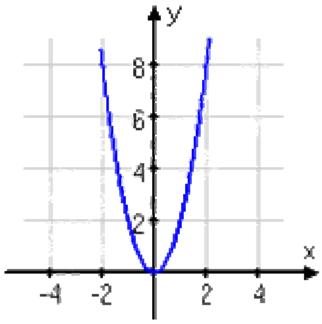
$y=(2x)^2$

6. *f(ax) 0<a<1* skala osi *OX* jest *a* razy większa



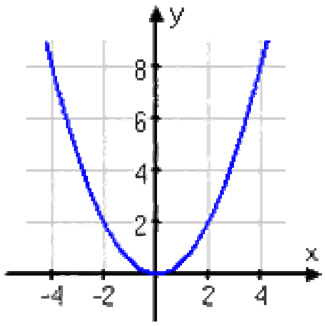
$y=((1/2)x)^2$

7. *af(x) a>1* skala osi *OY* jest *a* razy większa



$y=2x^2$

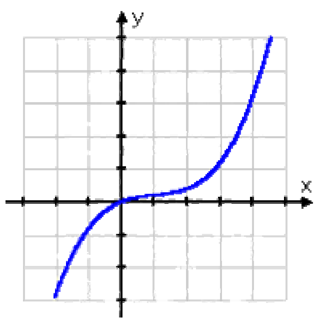
8. *af(x) 0<a<1* skala osi *OY* jest *a* razy mniejsza



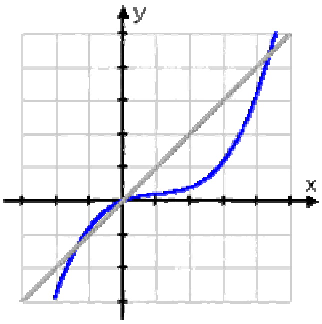
$y=(1/2)x^2$

Konstrukcja wykresu funkcji odwrotnej (tylko dla funkcji wzajemnie jednoznacznej - bijekcji)

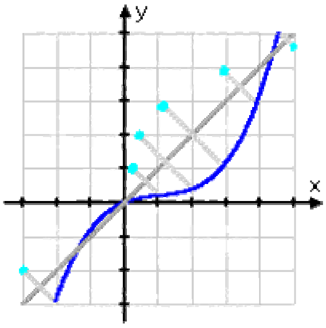
1. wykres wyjściowy



2. narysowanie dwusiecznej pierwszej ćwiartki



3. odbicie symetryczne względem dwusiecznej punktów wykresu



4. tak powstały wykres jest wykresem funkcji odwrotnej do funkcji wyjściowej