

**LISTA 1. Całki oznaczone.**

**Zad. 1.** Wykorzystując wzór całkowania przez części wyznaczyć całki oznaczone:

$$a. \int_1^e x \ln x dx; \quad b. \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad c. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx; \quad d. \int_0^1 x^3 e^{-x} dx; \quad e. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \arctg x dx.$$

**Zad. 2.** Stosując całkowanie przez podstawienie lub przez zamianę zmiennej obliczyć całki oznaczone:

$$a. \int_0^2 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx; \quad b. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad c. \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx; \quad d. \int_2^5 x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx; \quad e. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$$

**Zad. 3.** Obliczyć średnią wartość funkcji na podanym przedziale:

$$a) f(x) = 3x^2 + 2x + 1 \quad x \in [0,1]; \quad b) f(x) = \frac{1}{4x}; \quad x \in [1,2];$$

$$c) f(x) = e^{2x+5}; \quad x \in [0,1]; \quad d) f(x) = 2x \cdot e^{x^2-4}; \quad x \in [-2,2].$$

**Zad. 4.** Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach:

$$a) y = x^2, y = 5x; \quad b) y = x^3, y = 4x; \quad c) y = x^2, y = 2 - x^2;$$

$$d) y = x^2, y = x + 2; \quad e) y = x^2 - 4x - 5, y = 0, x = 1, x = 4; \quad f) y = \frac{1}{x}, y = -x + \frac{17}{4};$$

$$g) y = -\frac{1}{x+1}, y = 0, x = 0, x = 2; \quad h) y = \frac{16}{25}x^2 + 1, y = x^2; \quad i) y = x^3 - 2x^2 - 3x, y = 0, x = 1, x = 2;$$

$$j) y = 10^x, y = 10, y = 100, x = 0; \quad k) y = e^x, y = e^{-x}, x = 1; \quad l) y = x^2 - 4, y = 4 - x^2.$$

**Zad. 5.** Obliczyć długość łuku:

$$(a) \text{paraboli } y = \frac{x^2}{2p}, \quad 0 \leq x \leq c; \quad (b) \text{linii łańcuchowej } y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad 0 \leq x \leq c;$$

$$(c) \text{prostej } y = 2x, \quad x \in [-1,0]; \quad (d) \text{krzywej } y = 2 \ln(4 - x^2), \quad x \in [0,1].$$

**Zad. 6.** Obliczyć objętość brył powstałych z obrotu podanych figur wokół osi OX:

$$(a) \frac{4}{x} \leq y \leq 5 - x, \quad 1 \leq x \leq 4; \quad (b) x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (c) 0 \leq y \leq \sqrt{x} e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

**Zad. 7.** Obliczyć pola powierzchni bocznej brył powstałych z obrotu wykresów podanych funkcji wokół osi OX:

$$(a) y = \frac{1}{3}x^3, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (b) y^2 = 4ax, \quad 0 \leq x \leq 3a; \quad (c) y = \sqrt{4 - x^2}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

**Zad. 8.** Obliczyć całki niewłaściwe:

$$a) \int_{-\infty}^0 e^x dx; \quad b) \int_{-\infty}^0 2^{3x} dx; \quad c) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$d) \int_1^{+\infty} e^{-x} dx; \quad e) \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \quad f) \int_{-1}^0 \frac{1}{x+1} dx;$$

$$g) \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx; \quad h) \int_0^2 \frac{-2}{x^3} dx; \quad i) \int_0^8 \left( 2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx.$$