

## LISTA 2. Funkcje dwóch lub trzech zmiennych

**Zad. 1:** Wyznaczyć i naszkicować na płaszczyźnie OXY dziedzinę funkcji dwóch zmiennych:

a.  $f(x,y) = \sqrt{x \sin y}$ ; b.  $f(x,y) = \sqrt{x-1} + \ln(2y+3)$ ; c.  $f(x,y) = \ln(xy)$ ; d.  $f(x,y) = \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}$ .

**Zad. 2:** Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego. Zapisać gradient:

a.  $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ; b.  $f(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$ ; c.  $f(x,y) = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$ ; d.  $f(x,y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ ;

e.  $f(x,y,z) = \arctan \frac{y}{x} + xz$ ; f.  $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$ ; g.  $f(x,y,z) = x^2 y - \sqrt{x^2 + 5z^4}$ ; h.  $f(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

**Zad. 3:** Napisać równanie płaszczyzny stycznej i prostej normalnej do wykresu funkcji  $f(x,y)$  w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$ :

a)  $f(x,y) = x^2 \sqrt{y+1}$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, z_0)$ ; b)  $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, z_0)$ ;

c)  $f(x,y) = x^y$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, z_0)$ ; d)  $f(x,y) = e^{x+2y}$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, z_0)$ .

**Zad. 4:** Obliczyć gradient i pochodną kierunkową funkcji  $f(x,y)$  w podanym punkcie i w kierunku podanego wektora:

a.  $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ;

b.  $f(x,y,z) = x(\ln y - \arctan z)$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 1, 1)$ ,  $\vec{u} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ ;

c.  $f(x,y,z) = \sin(x+2y) + \sqrt{xyz}$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3)$ ,  $\vec{u} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)$ .

**Zad. 5:** Stosując różniczki zupełne obliczyć wartości przybliżone podanych niżej wyrażeń:

a.  $(1,02)^3 \cdot (0,997)^2$ ; b.  $\sqrt[3]{(2,93)^3 + (4,05)^3 + (4,99)^3}$ ; c.  $2,97 \cdot e^{0,05}$ ; d.  $(1,01)^{2,98}$ ; e.  $\frac{\cos 0,05}{1,96}$ .

**Zad. 6:** Wyznaczyć ekstremum funkcji dwóch zmiennych:

a.  $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ ; b.  $f(x,y) = x^4 + 4xy + y^4 - 2x^2 - 2y^2$ ; c.  $f(x,y) = x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} - 9y$ ;

d.  $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$  ( $x > 0$   $y > 0$ ); e.  $f(x,y) = 2xy - \frac{4}{x} - \frac{12}{y}$  ( $x \neq 0$   $y \neq 0$ );

f.  $f(x,y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$  ( $x > 0$   $y > 0$ ); g.  $f(x,y) = (x^2 + y) \sqrt{e^y}$ .