

LISTA 2. Funkcje wielu zmiennych.

Zad. 1. Wyznaczyć i narysować dziedzinę funkcji dwóch zmiennych:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \sqrt{x \sin y}; & \text{b) } f(x, y) &= \sqrt{x-1} + \ln(2y+3); & \text{c) } f(x, y) &= \ln(xy); \\ \text{d) } f(x, y) &= \ln(y^2 - 4x + 8); & \text{e) } f(x, y) &= \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}; & \text{f) } f(x, y) &= \arcsin \frac{y-1}{x}; \\ \text{g) } f(x, y) &= \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}; & \text{h) } f(x, y) &= \ln \frac{x^2 + y^2 - 4}{9 - x^2 - y^2}; & \text{i) } f(x, y) &= \frac{3x}{2x - 5y}. \end{aligned}$$

Zad. 2. Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego. Zapisać gradient funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; & \text{b) } f(x, y) &= \ln(x^2 + xy + y^2); & \text{c) } f(x, y) &= \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}; & \text{d) } f(x, y) &= x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}; \\ \text{e) } f(x, y) &= e^{x(x+y)}; & \text{f) } f(x, y, z) &= x^{\frac{y}{z}}; & \text{g) } f(x, y, z) &= \ln(x + y - 4zy^2)^2; & \text{h) } f(x, y, z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Zad. 3. Napisać równanie płaszczyzny stycznej i prostej normalnej do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0, z_0) :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= x^2 \sqrt{y+1}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, z_0); & \text{b) } f(x, y) &= \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, z_0); \\ \text{c) } f(x, y) &= x^y, \quad (x_0, y_0, z_0) = (2, 4, z_0); & \text{d) } f(x, y) &= e^{x+2y}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (2, -1, z_0). \end{aligned}$$

Zad. 4. Obliczyć gradient i pochodną kierunkową funkcji f w podanym punkcie i w kierunku podanego wektora:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= x^2 + y^2, \quad (x_0, y_0) = (-3, 4), \quad \vec{u} = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right); & \text{b) } f(x, y) &= x - \frac{y}{x^2} + y, \quad (x_0, y_0) = (1, 1), \quad \vec{u} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right); \\ \text{c) } f(x, y, z) &= 1 - e^{xyz}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1), \quad \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \\ \text{d) } f(x, y, z) &= \sin yz + \cos xz - \sin(\cos xy), \quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0), \quad \vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Zad. 5. Zapisać różniczki zupełne podanych niżej funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= 3x^3 y^5; & \text{b) } f(x, y) &= y \ln x; & \text{c) } f(x, y) &= e^x \sqrt{y}; \\ \text{d) } f(x, y) &= \sin^2 x \cos^2 y; & \text{e) } f(x, y, z) &= z \ln \left(1 + \frac{x}{y}\right); & \text{f) } f(x, y, z) &= \arctg \frac{xy^2}{z^3}. \end{aligned}$$

Zad. 6. Stosując różniczki zupełne obliczyć wartości przybliżone podanych niżej wyrażeń:

$$\text{a) } (1,02)^3 \cdot (0,997)^2; \quad \text{b) } \sqrt[3]{(2,93)^3 + (4,05)^3 + (4,99)^3}; \quad \text{c) } (2,97)^2 \cdot e^{0,05}; \quad \text{d) } (1,01)^{2,98}; \quad \text{e) } \frac{\cos 0,05}{1,96}.$$

Zad. 7. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego podanych niżej funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= xy + \frac{x^2}{y^3}; & \text{b) } f(x, y) &= \sin(x^2 + y^2); & \text{c) } f(x, y) &= xe^{xy}; \\ \text{d) } f(x, y, z) &= e^{3x+4y} \cos 5z; & \text{e) } f(x, y, z) &= \ln(x^2 + y^4 + z^6 + 1); & \text{f) } f(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$