LISTA 4 – ROZKŁAD NORMALNY. TWIERDZENIA GRANICZNE.

Zad. 1. Zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny ($X \sim N(0;1)$). Wyznaczyć:
a) $P(X<1{,}32)$; $P(X>1{,}45)$; $P(X>-2{,}15)$; $P(-2{,}34<X<1{,}76)$;
b) $P(X<1{,}58)$; $P(X>2{,}35)$; $P(X>-1{,}13)$; $P(-1{,}41<X<2{,}78)$.

Zad. 2. Wyznaczyć prawdopodobieństwa, jeśli zmienna losowa X ma rozkład normalny z podanymi parametrami:
a) **$X \sim N(10;2)$:** $P(X<13)$; $P(X>9)$; $P(X>6)$; $P(2<X<14)$;
b) **$X \sim N(5;3)$:** $P(X<6{,}5)$; $P(X>2)$; $P(X>8)$; $P(-1<X<9{,}5)$.

Zad. 3. Wytrzymałość lin stalowych, pochodzących z masowej produkcji, jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym N(100MPa, 5MPa). Obliczyć:
a. prawdopodobieństwo, że losowo wybrana lina ma wytrzymałość większą niż 90MPa (czyli $P(X>90)$);
b. prawdopodobieństwo, że wytrzymałość losowo wybranej liny mieści się w przedziale od 85MPa do 95MPa (czyli $P(85<X<95)$);
c. ile przeciętnie lin spośród 1000 ma wytrzymałość mniejszą niż 100MPa.

Wyznaczyć liczbą k taką, aby $P(X<k)=0{,}4$.

Zad. 4. Czas świecenia żarówek pochodzących z masowej produkcji jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym N(100h, 10h). Obliczyć:
a. prawdopodobieństwo, że czas świecenia losowo wybranej żarówki będzie większy niż 65h;
b. prawdopodobieństwo, że czas świecenia losowo wybranej żarówki mieści się w przedziale od 70h do 120h;
c. ile przeciętnie żarówek spośród 1000 świeci krócej niż 80h.

Wyznaczyć liczbą k taką, aby $P(X<k)=0{,}1$.

Zad. 5. Liczba słonecznych dni w roku w Opolu jest zmienną losową o wartości oczekiwanej równej 75 dni i odchyleniu standardowym równym 20 dni. Jakie jest prawdopodobieństwo (wykorzystać nierówność Czebyszewa), że średnia liczba dni słonecznych w ciągu następnych 50 lat będzie się różniła od 75 o mniej niż 25 dni (przyjmujemy, że liczby dni słonecznych w kolejnych latach nie są od siebie zależne)?

Zad. 6. Wartość inwestycji zagranicznych w Polsce jest zmienną losową o wartości oczekiwanej równej 7850 mln \$ i odchyleniu standardowym równym 3520 mln \$. Jakie jest prawdopodobieństwo (wykorzystać nierówność Czebyszewa), że średnia wartość inwestycji w ciągu następnych 40 lat będzie się różniła od 7850 mln \$ o mniej niż 3400 mln \$ (przyjmujemy, że wartości inwestycji zagranicznych w kolejnych latach nie są od siebie zależne)?

Zad. 7. W windach osobowych znajduje się instrukcja następującej treści: „maksymalne obciążenie 7 osób lub 500 kg". Zakładając, że waga pasażera ma rozkład N(70; 3), policzyć prawdopodobieństwo, że waga 7 osób przekroczy dopuszczalne obciążenie 500 kg. Skorzystać z tw. O rozkładzie sumy niezależnych zmiennych losowych mających rozkład normalny.

Zad. 8. Waga pewnego towaru wraz z opakowaniem jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym N(90 kg; 7 kg). Waga samego opakowania jest zmienną losową Y również o rozkładzie normalnym N(10 kg; 3 kg). Zmienne te są niezależne. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Z oznaczającej ciężar samego towaru (Z=X-Y), a następnie obliczyć: **a.** prawdopodobieństwo tego, że waga samego towaru Z będzie zawarta pomiędzy 83 kg a 93 kg; **b.** jakiego ciężaru nie przekroczy waga samego towaru Z z prawdopodobieństwem 0.85?

Zad. 9. Wzrost dorosłych mężczyzn w Polsce ma rozkład N(175cm, 8cm), a wzrost dorosłych kobiet ma rozkład N(165cm, 5cm). Jakim rozkładem można przybliżać rozkład różnicy wzrostu pomiędzy mężczyzną i kobietą w losowo wybranym małżeństwie. Stosując ten rozkład policzyć prawdopodobieństwo tego, że w tym małżeństwie:
a. mężczyzna jest mniej niż 5 cm wyższy od kobiety; **b.** różnica wzrostu co do wartości bezwzględnej nie przekroczy 1 cm. Jaką liczbę, co do wartości bezwzględnej, przekroczy różnica wzrostu z prawdopodobieństwem równim 0,9?

Zad. 10. Załóżmy, że czas przepisywania jednej strony pewnego artykułu przez maszynistkę ma rozkład normalny N(15min; 3min). Artykuł zawiera 8 stron. Obliczyć: **a.** prawdopodobieństwo tego, że czas oczekiwania na przepisanie całego artykułu nie będzie krótszy od 2 godzin; **b.** jakiego czasu przepisywania artykułu maszynistka nie przekroczy z prawdopodobieństwem 0,99?

Zad. 11. Ustalono, że miesięczne dochody pewnej firmy X_1 mają rozkład normalny N(30 tys.; 10 tys.) oraz że miesięczne dochody innej firmy X_2 mają rozkład normalny N(20 tys.; 2 tys.). Dochody obu firm są niezależne. Niech $Y=(X_1+X_2)/2$ oznacza średni miesięczny dochód z jednej firmy ich właściciela. Wyznaczyć, jaki rozkład ma zmienna losowa Y, a następnie obliczyć: **a.** prawdopodobieństwo tego, że średni miesięczny dochód z jednej firmy Y będzie zawarty między 20 tys. i 25 tys.; **b.** jakiej liczby średni miesięczny dochód Y nie przekroczy z prawdopodobieństwem 0,9?

Zad. 12. W pewnej szkole uczy się 500 dzieci. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń ma co najmniej jedną dwójkę wynosi 0,1. Korzystając z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a, stwierdzić, jakim rozkładem można przybliżać rozkład liczby dzieci, które mają co najmniej jedną dwójkę. Stosując ten rozkład obliczyć: **a.** prawdopodobieństwo tego, że w tej szkole liczba dzieci, które mają co najmniej jedną dwójkę, różni się od 50 o co najwyżej 10? **b.** jaką liczbę przekroczy liczba dzieci, które mają co najmniej jedną dwójkę, z prawdopodobieństwem równym 0,35?

Zad. 13. W zajezdni znajduje się 200 autobusów. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany autobus jest sprawny do jazdy wynosi 0,7. Korzystając z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a, stwierdzić, jakim rozkładem można przybliżać rozkład ilości sprawnych do jazdy autobusów. Stosując ten rozkład obliczyć: **a.** prawdopodobieństwo tego, że w losowo wybranej chwili co najmniej 160 autobusów jest sprawnych? **b.** jakiej liczby nie przekroczy liczba sprawnych autobusów z prawdopodobieństwem 0,45?

Zad. 14. Wadliwość obuwia produkowanego przez firmę X wynosi 1%. Sklep sprzedał 300 par obuwia wyprodukowanego przez tę firmę. Korzystając z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a policzyć następujące prawdopodobieństwa: **a.** więcej niż 8% klientów złoży reklamację; **b.** mniej niż 9% klientów złoży reklamację.

Zad. 15. Przeprowadzono badania nad jakością piwa i stwierdzono, że co dwudziesta butelka nie nadaje się do spożycia. Stosując twierdzenie Moivre'a-Laplace'a obliczyć, prawdopodobieństwo, że pracownik Sanepidu w partii 150 butelek: **a.** znajdzie co najmniej 6 butelek nie nadających się do spożycia? **b.** prawdopodobieństwo tego, że ilość butelek nie nadających się do spożycia będzie się różnić od najbardziej prawdopodobnej ich liczby, co do wartości bezwzględnej, nie więcej niż o 5; **c.** jakiej wielkości z prawdopodobieństwem 0,99 nie przekroczy ilość butelek nie nadających się do spożycia w tej partii?

Zad. 16. W grupie studenckiej przeprowadzono test z analizy, w którym można uzyskać od 0 do 100 punktów. Przeciętna ilość punktów uzyskanych przez studenta wynosi 40, a odchylenie standardowe 20. Zakładając, że wyniki studentów są niezależne o tym samym rozkładzie i korzystając z twierdzenia Lindeberga-Levy'ego, stwierdzić, jakim rozkładem można przybliżać rozkład sumy punktów uzyskanych przez 150 osobową grupę studencką. Obliczyć: **a.**prawdopodobieństwo tego, że suma punktów uzyskana przez tę grupę będzie większa od 6500 ($P(\sum X_i>6500)$); **b.**taką liczbę punktów k, dla której prawdopodobieństwo tego, że suma punktów uzyskana przez tę grupę jest mniejsza od k jest równe 0.75 ($P(\sum X_i <k)=0.75$).

Zad. 17. Czas oczekiwania przez pewną osobę na autobus linii A jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 10 minut i wariancją równą 100 minut. Niech czasy oczekiwania w kolejne dni będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Korzystając z twierdzenia Lindeberga-Levy'ego, stwierdzić, jakim rozkładem można przybliżać rozkład zmiennej losowej oznaczającej czas, jaki kwartalnie traci ta osoba na czekanie na autobus linii A (przyjmujemy, że kwartał ma 90 dni)? Obliczyć: **a.** prawdopodobieństwo tego, że osoba ta traci kwartalnie więcej niż 910 minut; **b.** ilość minut k taką, że osoba ta traci kwartalnie mniej niż k minut z prawdopodobieństwem równym 0.95 .

Zad. 18. Z magazynu pobrano losowo 100 worków. Średnia waga worka jest równa 50 kg, a odchylenie standardowe wynosi 4 kg. Korzystając z twierdzenia Lindeberga-Levy'ego i zakładając, że wagi worków są niezależne o tym samym rozkładzie stwierdzić, jakim rozkładem można przybliżać rozkład łącznej wagi worków. Stosując ten rozkład obliczyć prawdopodobieństwo tego, że: **a.** łączna waga worków będzie się różnić od 4000 kg, co do wartości bezwzględnej, nie więcej niż o 800 kg; **b.** łączna waga worków przekroczy 4500 kg; **c.** jakiej wagi nie przekroczy łączna waga worków z prawdopodobieństwem równym 0,85?