LISTA 6 – ESTYMACJA PUNKTOWA I PRZEDZIAŁOWA

Zad. 1. Wykazać, że estymator:

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

wariancji rozkładu wykładniczego o gęstości:
jest estymatorem nieobciążonym.

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & dla \quad x>0\\ 0 & dla \quad x\le 0\end{cases}$$

Zad. 2. Metodą największej wiarygodności na podstawie n-elementowej próby prostej $X_1, \ldots, X_n$ wyznaczyć estymator parametru λ rozkładu wykładniczego o gęstości:

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & dla \quad x>0\\ 0 & dla \quad x\le 0\end{cases}$$

Zad. 3. Metodą największej wiarygodności na podstawie n-elementowej próby prostej $X_1, \ldots, X_n$ znaleźć estymator parametru p rozkładu geometrycznego o funkcji prawdopodobieństwa:

$$\mathrm{P}(K=k)=pq^{k-1}, \quad k\in N$$

Zad. 4. W celu zbadania jakości partii kondensatorów zbadano maksymalną pojemność 25 kondensatorów. Uzyskane wyniki były następujące (w pF): 62, 61, 57, 58, 70, 72, 58, 56, 59, 60, 68, 63, 65, 69, 67, 55, 56, 57, 58, 58, 60, 52, 54, 72, 74. Wyznaczyć przedziały ufności dla średniej maksymalnej pojemności na poziomie ufności $1-\alpha=0.95$ w następujących przypadkach:

a. gdy nie posiadamy żadnych informacji o rozkładzie prawdopodobieństwa badanej cechy (stosując nierówność Czebyszewa);
b. zakładając, że cecha ma rozkład normalny $N(\mu; \sigma)$;
c. zakładając, że cecha ma rozkład normalny $N(\mu; 6)$;
d. jeśli nie posiadamy żadnych informacji o rozkładzie, ale zbadano dodatkowo maksymalną pojemność 10 kondensatorów i otrzymano następujące wyniki: 66, 70, 74, 72, 54, 67, 70, 59, 71, 60.

Zad. 5. Badano wydatki studentów warszawskich na rozrywkę. Wylosowano 20 studentów i zanotowano ich wydatki, które przedstawiały się następująco: 231, 172, 125, 174, 299, 120, 180, 123, 175, 134, 166, 181, 34, 129, 155, 241, 118, 97, 113, 87. Wyznaczyć przedziały ufności dla średniej miesięcznych wydatków studentów na rozrywkę na poziomie ufności $1-\alpha=0.95$ w następujących przypadkach:

a. gdy nie posiadamy żadnych informacji o rozkładzie prawdopodobieństwa badanej cechy (stosując nierówność Czebyszewa);
b. zakładając, że cecha ma rozkład normalny $N(\mu; \sigma)$;
c. zakładając, że cecha ma rozkład normalny $N(\mu; 59)$;
d. jeśli nie posiadamy żadnych informacji o rozkładzie, ale zbadano dodatkowo wydatki 15 studentów i przedstawiały się one następująco: 170, 128, 140, 220, 125, 189, 138, 155, 143, 160, 180, 134, 90, 105, 141.

Zad. 6. Wyprodukowano pewien nowy środek owadobójczy. Środek ten wypróbowano na tysiącu owadach, z których 852 padły. Oszacować na tej podstawie skuteczność tego środka.

Zad. 7. Wykonano 90 rzutów monetą i otrzymano następujące wyniki:

Wynik	0 (orzeł)	1 (reszka)
Liczba rzutów	42	48

Wyznaczyć przedział ufności dla częstości wyrzucenia orła, na poziomie ufności $1-\alpha=0,95$.

Zad. 8. W losowo wybranej grupie 10 samochodów osobowych pewnej marki przeprowadzono badanie zużycia benzyny na tej samej dla wszystkich samochodów trasie długości 100 km. Okazało się, że średnia zużycia benzyny (w l/100 km) dla tej grupy samochodów wyniosła 8,1, a odchylenie standardowe 0,8. Zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny, wyznaczyć 95%-ową realizację przedziałów ufności dla wartości przeciętnej, wariancji i odchylenia standardowego zużycia benzyny przez samochody tej marki na rozpatrywanej trasie.

Zad. 9. Zmierzono średnice 51 drzew wybranych losowo z lasu sosnowego i otrzymano średnią średnicę równą 37,3 cm oraz wariancję równą 13,5 cm^2. Zakładając, że średnice drzew mają rozkłady normalne, wyznaczyć 90, 95 i 99%-ową realizację przedziałów ufności dla przeciętnej, wariancji i odchylenia standardowego średnicy drzewa z tego lasu.