

LISTA 4. Równania różniczkowe zwyczajne.

Zad. 1. Rozwiązać równania różniczkowe o rozdzielających się zmiennych:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $y' = e^{x-y}$; | e) $y' = -y \sin x$; |
| b) $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0$; | f) $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$; |
| c) $y' = \frac{y-1}{x+1}$; | g) $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$; |
| d) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$; | h) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$. |

Zad. 2. Znaleźć rozwiązania równań różniczkowych o zmiennych rozdzielonych z danym warunkiem początkowym $(x_0; y_0)$:

- | | |
|--|--|
| a) $dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$, $(x_0; y_0) = (1; \frac{\pi}{2})$; | c) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$, $(x_0; y_0) = (0; 0)$; |
| b) $(1-x)dy - ydx = 0$, $(x_0; y_0) = (0; 1)$; | d) $xdy - ydx = 0$, $(x_0; y_0) = (1; 1)$. |

Zad. 3. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------|
| a) $y' - y \sin x = \sin x \cos x$; | d) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; |
| b) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$; | e) $y' + y = 2e^x$. |
| c) $y' - \frac{1}{x}y = x$; | |

Zad. 4. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania różniczkowego liniowego rzędu pierwszego z danym warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$, $x_0=1, y_0=1$; | c) $y' - 2xy = x$, $x_0=1, y_0=1$; |
| b) $xy' = x - y$, $x_0=1, y_0=3$; | d) $xy' = x + 2y$, $x_0=1, y_0=2$. |

Zad. 5. Scałkować następujące równania różniczkowe liniowe jednorodne:

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|--|
| a) $y'' - 6y' + 8y = 0$; | d) $y'' + 3y' + 2y = 0$; | g) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$; |
| b) $y''' - y' + y = 0$; | e) $y'' - 2y' = 0$; | h) $y''' + y'' + y' + y = 0$; |
| c) $y'' + 4y' + 4y = 0$; | f) $y'' + 4y = 0$; | i) $y^{(7)} + 6y^{(6)} + 12y^{(5)} + 8y^{(4)} = 0$. |

Zad. 6. Scałkować następujące równania różniczkowe liniowe niejednorodne metodą współczynników nieoznaczonych:

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| a) $y'' - y = x^2 - x + 1$; | d) $y'' + y = 6\sin 2x$; | g) $y^{(4)} - 7y''' + 12y'' = x$; |
| b) $y'' + y' = 3$; | e) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$; | h) $y''' + 2y'' + y' = 8e^x$; |
| c) $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$; | f) $y'' + 4y = \sin 2x$; | i) $y^{(4)} - y'' = 2\sin x$. |