

Zastosowanie całki Riemanna

1. Pole figury płaskiej: (we współrzędnych kartezjańskich):

$$\text{a. } D = \{(x;y): a \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq f(x)\} \quad |D| = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{b. } D = \{(x;y): a \leq x \leq b \quad f(x) \leq y \leq 0\} \quad |D| = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{c. } D_X = \{(x;y): a \leq x \leq b \quad f(x) \leq y \leq g(x)\} \quad |D_X| = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$\text{d. } D_Y = \{(x;y): c \leq y \leq d \quad h(y) \leq x \leq k(y)\} \quad |D_Y| = \int_c^d (k(y) - h(y)) dy$$

Przykład: Obliczyć pole figury zawartej między krzywą $y = -x^2 + 2x - 2$ i prostymi $y = x + 1$ $x = -1$ $x = 2$

2. Długość łuku krzywej:

Funkcje f oraz f' – ciągłe $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$

Przykład: Obliczyć długość linii łańcuchowej $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ czyli $y = ach \frac{x}{a}$,

gdzie $0 < x < b$.

3. Objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej:

Funkcje f oraz f' – ciągłe, $f(x) \geq 0$ dla $a \leq x \leq b$

Objętość: $|V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Przykład: Obliczyć objętość torusa powstałego przez obrót koła:

$$x^2 + (y-h)^2 \leq r^2$$

Pole powierzchni bocznej: $|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$

Przykład: Obliczyć pole powierzchni bocznej powyższego torusa.